

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES

(hoja 1 curso 07/08)

1. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales. Si $f : U \rightarrow V$ es una aplicación, indica en qué casos es una aplicación lineal.

1. $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$ $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3 - 7x_2, 3x_1 - x_2^2)$
2. $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^4$ $f((x_1, x_2)) = (x_1x_2, 3x_1 - 2x_2, -x_1, 9)$
3. $U = \mathbb{M}_2$, $V = \mathbb{R}^3$ $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b + c + d, -a + b, c - 2d)$

2. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales referidos a sus bases canónicas B_U y B_V respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : U \rightarrow V$, el subespacio vectorial A de U y el subespacio vectorial C de V . Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Ecuaciones, dimensión y una base de $f(A)$
3. $f^{-1}(\vec{y})$, $\vec{y} \in V$.
4. $f^{-1}(C)$.

Para los siguientes casos:

1. (a)
$$\begin{cases} U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2 \\ f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3) & C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_2 = 0\} \\ A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\} & \vec{y} = (-1, 3) \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3 \\ f((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2, x_1) & C = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 + y_3 = 0\} \\ A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 0\} & \vec{y} = (1, -2, 0) \end{cases}$$
- (c)
$$\begin{cases} U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{R}^3 \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 + x_3, 3x_1) \\ A = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 / x_2 = 0, x_3 - x_1 = 0\right\} & \vec{y} = (1, 0, 1) \\ C = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_3 = 0\} \end{cases}$$

3. Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U y B_V respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : U \rightarrow V$. Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Ecuaciones, dimensión y una base de $\text{Im}(f)$.
3. Ecuaciones, dimensión y una base de $\text{Ker}(f)$.

Para los siguientes casos:

1. (a) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3, f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3, -x_2 - x_3)$
 (b) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2, f((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2)$
 (c) $U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{P}_3, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b+c+d) + (a+c)x - (a+b)x^2 + (c+d)x^3$
 (d) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{P}_2, f((a, b)) = 2b + ax + (a - b)x^2$
 (e)
$$\begin{cases} U = \{M \in \mathbb{M}_3 / M \text{ es diagonal}\}, V = \mathbb{R}^3 \\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\right) = (x_2, x_3 - x_1, x_1 + x_2) \end{cases}$$

4. Sean $U(\mathbb{R}), V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_U = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales $f : U \rightarrow V$ y $g : U \rightarrow V$ tales que

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)) &= (5x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 4x_3, x_1 - 6x_3, 0) \\ g((x_1, x_2, x_3)) &= (2x_3, -x_1 + x_2 + x_3, 0, 4x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Expresión matricial de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Expresión matricial de g respecto de las bases B_U y B_V .
3. Expresión matricial de $2f + 3g$ respecto de las bases B_U y B_V .

5. Sea $U(\mathbb{R}), V(\mathbb{R}), W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_U = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $B_V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ y $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$, tales que

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)) &= (x_2 - 2x_3, x_2 + x_3, 0, x_1 - x_3) \\ g((x_1, x_2, x_3, x_4)) &= (2x_3, -x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Expresión matricial de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Expresión matricial de g respecto de las bases B_V y B_W .
3. Expresión matricial de $g \circ f$ respecto de las bases B_U y B_W .

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES (hoja 2 curso 07/08)

6.- Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U , B_V y B_W respectivamente. Sean $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ y $h : U \rightarrow V$ aplicaciones lineales. Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_U y B_V .
2. Matriz de g respecto de las bases B_V y B_W .
3. Matriz de h respecto de las bases B_U y B_V .
4. Matriz de la aplicación gof respecto de las bases B_U y B_W .
5. Clasificar las aplicaciones f, g, gof .
6. Matriz de la aplicación $3f(x) - 2h(x)$ respecto de las bases B_U y B_V .
7. Matriz de g^{-1} respecto de las bases B_V y B_W .
8. Ecuaciones del cambio de base de B_U a B'_U siendo B'_U base de U
9. Ecuaciones del cambio de base de B_V a B'_V siendo B'_V base de V
10. Matriz de f respecto de las bases B'_U y B'_V

(a) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_3, 4x_2 - 3x_3)$$

$$g((x_1, x_2)) = (2x_1, x_1 + x_2)h((x_1, x_2, x_3)) = (-x_3, x_2)$$

$$B'_U = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$B'_V = \{(1, 2), (3, -1)\}$$

(b) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2, x_1)$$

$$g((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, 3x_2, x_1 + x_3)$$

$$h((x_1, x_2)) = (-5x_1 + x_2, -x_2, x_1)$$

$$B'_U = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

$$B'_V = \{(1, 2, 0), (1, 3, -1), (0, 2, 0)\}$$

(c) $U = \mathbb{M}_2, V = \mathbb{P}_3, W = \mathbb{R}^4$

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = a_1 + (a_2 - a_3)x + (a_3 - a_2)x^2 + a_4x^3$$

$$g(b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3) = (b_1 + b_2, b_2 - b_4, -b_3, -b_4)$$

$$h\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = (a_4 - a_3) + a_1x + 2a_3x^2 + (a_2 - a_1)x^3$$

$$B'_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B'_V = \{1 + x, x^2 - x^3, 1 - 2x^2, 2x + x^3\}$$

$$(d) \ U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{P}_2, W = \mathbb{R}^3$$

$$f((a_1, a_2)) = (a_1 - 3a_2)x^2$$

$$g((b_1 + b_2x + b_3x^2)) = (b_1 + b_3, b_2 - b_3, b_1)$$

$$h((a_1, a_2)) = 2a_1 + a_2 + a_1x - a_2x^2$$

$$B'_U = \{(-1, 3), (-3, 2)\}$$

$$B'_V = \{x, x - 1, x^2 - 2\}$$

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES (hoja 3 curso 07/08))

7.- Sean $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, respectivamente. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$f(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$$

$$f(\vec{e}_3) = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$$

Se consideran las bases $B'_V = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B'_W = \{(1, 2), (3, -1)\}$ de $V(\mathbb{R})$ y $W(\mathbb{R})$ respectivamente, se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_V y B_W .
2. Ecuaciones del cambio de base de B_V a B'_V .
3. Ecuaciones del cambio de base de B_W a B'_W .
4. Matriz de f respecto de las bases B'_V y B'_W .

8.- Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ cuyas bases canónicas son $B_{\mathbb{R}^2} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \in \text{Ker } f$$

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \in f^{-1}(\vec{u}_1 + -2\vec{u}_2 - \vec{u}_3)$$

Si $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ y $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 2, 0), (1, 3, -1), (0, 2, 0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases $B_{\mathbb{R}^2}$, $B_{\mathbb{R}^3}$.
2. Ecuaciones del cambio de base de $B_{\mathbb{R}^2}$ a $B'_{\mathbb{R}^2}$.
3. Ecuaciones del cambio de base de $B_{\mathbb{R}^3}$ a $B'_{\mathbb{R}^3}$.
4. Matriz de f respecto de las bases $B'_{\mathbb{R}^2}$, $B'_{\mathbb{R}^3}$.

9. Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{P}_3$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son $B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_W = \{1, x, x^2, x^3\}$, respectivamente. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1 + 2x - x^2 - 3x^3$$

Se pide:

1. Matriz de f respecto de las bases B_V y B_W .
2. Clasifica la aplicación f .

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES (hoja 4 curso 07/08))

10.- Sean $U(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son B_U y B_V respectivamente. Se considera la familia de aplicaciones lineales $f_\alpha : U \rightarrow V$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Hallar la matriz de f_α respecto de las bases B_U y B_V .
2. Estudiar las dimensiones de los subespacios $\text{Im}(f_\alpha)$ y $\text{Ker}(f_\alpha)$ en función del parámetro α .
3. Clasificar la aplicación según los valores de α .

(a) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, -x_1 + x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2 - x_3)$$

(b) $U = \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^3$

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + \alpha x_2 + x_3, \alpha x_4, -x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 + x_4)$$

(c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^4$

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + \alpha x_3, x_2 - x_3, \alpha x_1, x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3)$$

11.- Sean $V = \{M \in \mathbb{M}_2/M \text{ es simétrica}\}$, $W = \mathbb{P}_2$ espacios vectoriales cuyas bases canónicas son:

$$B_V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ con } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}, \text{ con } \vec{u}_1 = 1, \vec{u}_2 = x, \vec{u}_3 = x^2.$$

Sea $f_m : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$f_m(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 3\vec{u}_1 + (1 - m)\vec{u}_2 + 6\vec{u}_3$$

$$f_m(-\vec{e}_2) = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

$$f_m(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (1 + m)\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$$

Se pide:

1. Hallar la expresión matricial de f_m en las bases dadas.
2. ¿Para qué valores de m no se puede definir la aplicación lineal f_m^{-1} ?
3. Estudiar el subespacio vectorial $\text{Ker}(f_m)$ en función de m .

4. Determinar los valores de m para los cuales $p(x) = -2 + 6x^2$ pertenece al subespacio vectorial $\text{Im}(f_m)$.
5. Hallar la expresión matricial de f_1 respecto de las bases B_V y $B'_W = \{1 - x^2, x^2, x + x^2\}$.